



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



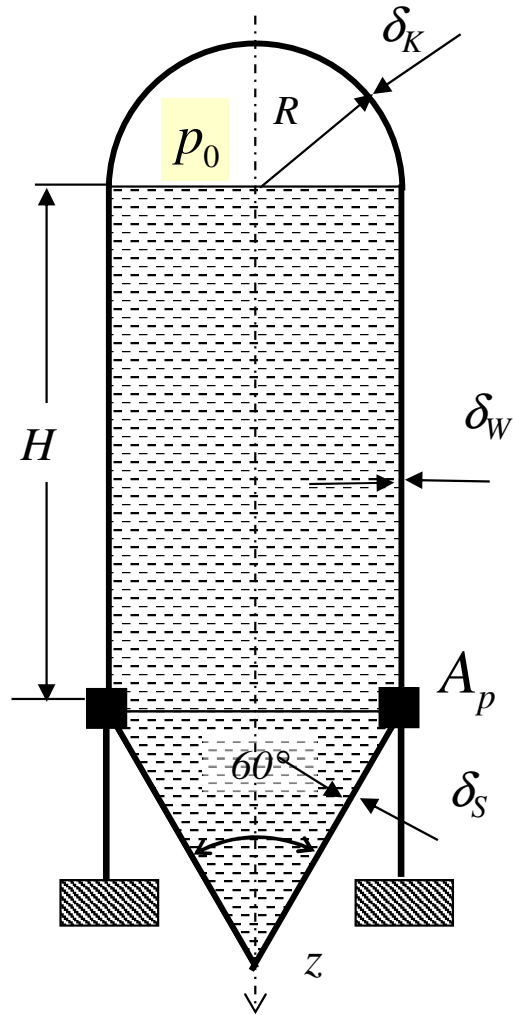
Wykład 12

Powłoki osiowosymetryczne

Przykłady

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Zad.1. Zbiornik złożony z części stożkowej, walcowej i kulistej, podparty na pierścieniu, wypełniony jest cieczą do poziomu połączenia walca z kulą. Powyżej cieczy panuje nadciśnienie p_0 . Dobrać grubości płaszcza zbiornika i pola pierścienia wykorzystując hipotezę Treski.



Dane:
 $R=2m$
 $H=8m$
 $p_0=1 \text{ bar}$
 $\gamma=10^4 \text{ N/m}^3$
 $k_r=100 \text{ MPa}$

 $\delta_K=?$
 $\delta_W=?$
 $\delta_S=?$
 $A_p=?$

Czasza:

$$\rho_p = R$$

$$\rho_t = R$$

Walec:

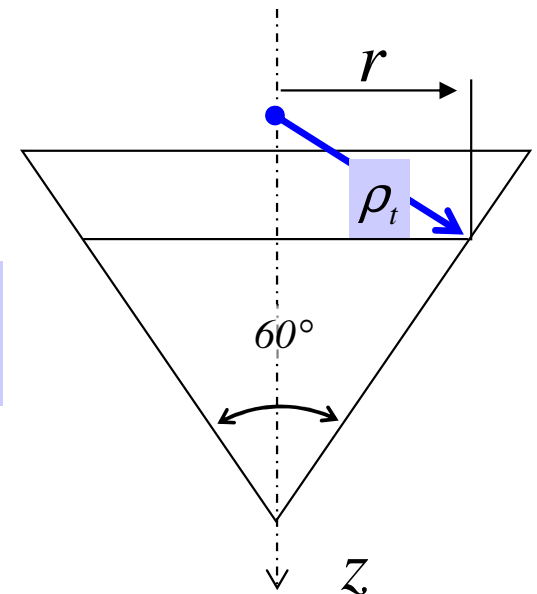
$$\rho_p = \infty$$

$$\rho_t = R$$

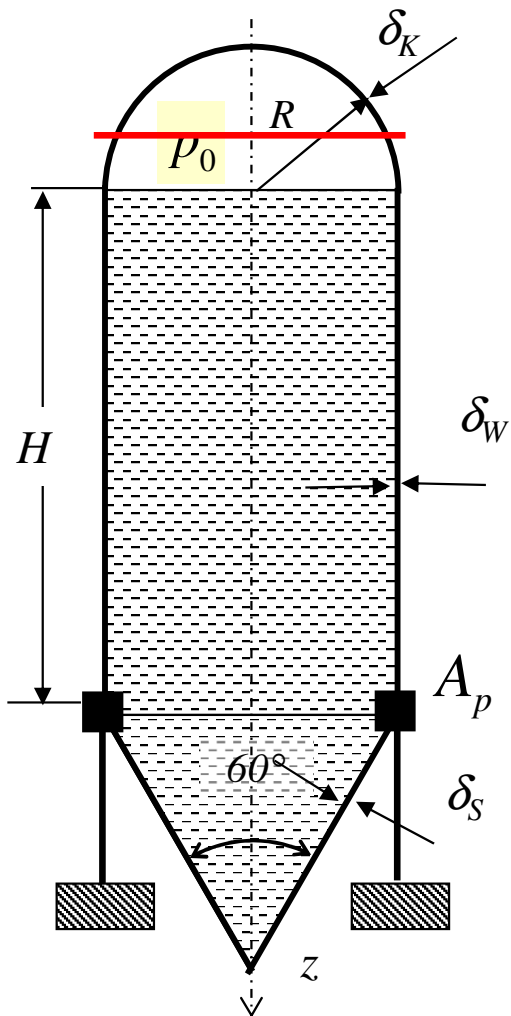
Stożek:

$$\rho_p = \infty$$

$$\rho_t = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$



Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa



Dane:
 $R=2m$
 $H=8m$
 $p_0=1 \text{ bar}$
 $\gamma=10^4 \text{ N/m}^3$
 $k_r=100\text{MPa}$

Czasza:

Tniemy razem z nieważkim gazem

Równanie równowagi sił na z:

$$2\pi r \delta_K \sigma_p \sin \alpha - \pi r^2 p_0 + Q = 0$$

$$\sigma_p = \frac{p_0 R}{2\delta_K}$$

$Q=0$

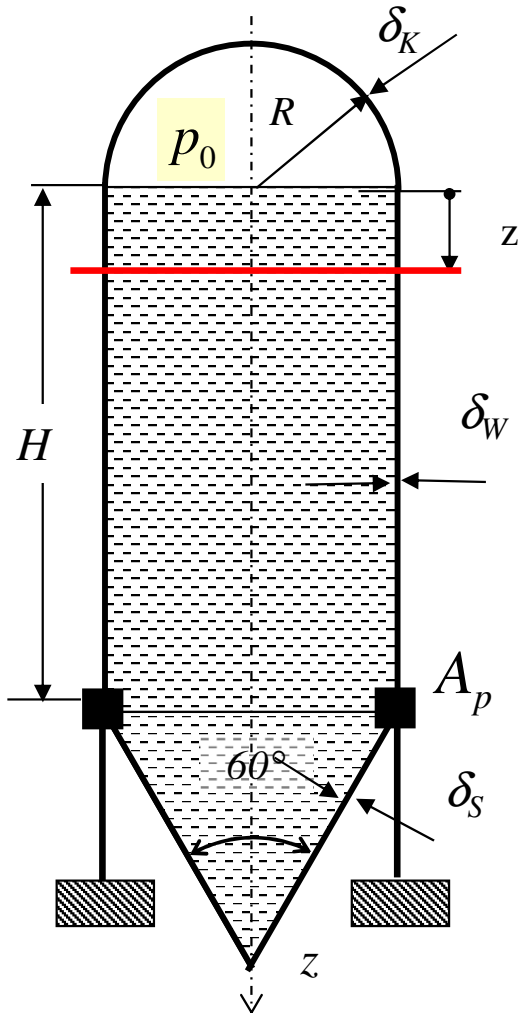
$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \rightarrow \sigma_t = \frac{p_0 R}{2\delta_K}$$

Hipoteza Treski: $\sigma_{red}^T = |\sigma_p| = \frac{p_0 R}{2\delta_K} \leq k_r$

Warunek wytrzymałościowy

$$\delta_K \geq \frac{p_0 R}{2k_r} = \frac{0.1 \cdot 2000}{2 \cdot 100} = 1\text{mm}$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa



Dane:
 $R=2m$
 $H=8m$
 $p_0=1 \text{ bar}$
 $\gamma=10^4 \text{ N/m}^3$
 $k_r=100 \text{ MPa}$

Walec:

Gaz jest nieważki
Woda daje ciężar

$2\pi R \delta_W \sigma_p - \pi R^2 (p_0 + \gamma \cdot z) + \pi R^2 z \cdot \gamma = 0$

$\sigma_p = \frac{(p_0 + \gamma \cdot z)R - \gamma \cdot z \cdot R}{2\delta_W}$

$\sigma_p = \frac{p_0 R}{2\delta_W}$

~~$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}$~~

$\sigma_t = \frac{(p_0 + \gamma \cdot z)R}{\delta_W}$

Równanie równowagi sił na z:

$2\pi R \delta_W \sigma_p - \pi R^2 p + Q = 0$

$Q = \pi R^2 z \cdot \gamma$

$p = p_0 + z \cdot \gamma$

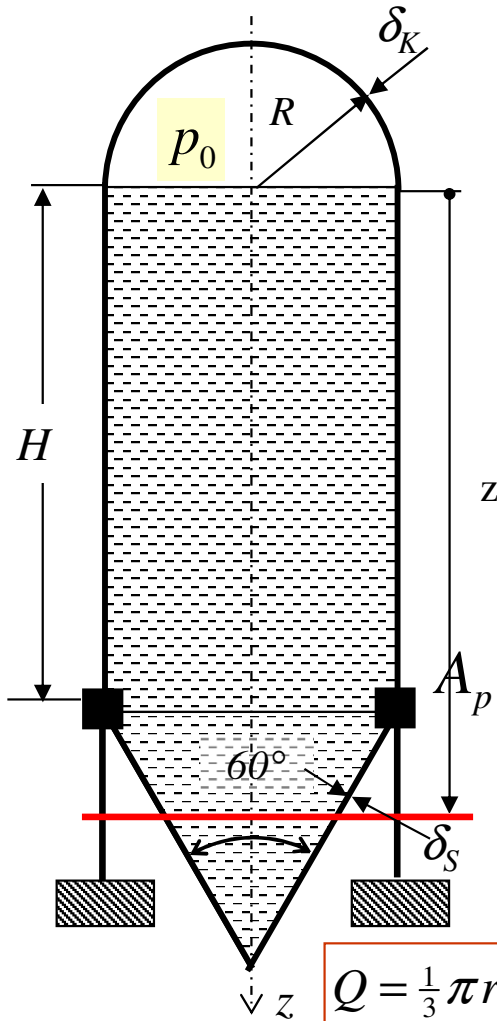
$\rho_p = \infty$

Hipoteza Treski: $\sigma_{red}^T = |\sigma_t| = \frac{(p_0 + \gamma \cdot z)R}{\delta_W} \leq k_r$

Warunek wytrzymałościowy

Dla $z=H$: $\delta_W \geq \frac{(p_0 + \gamma \cdot H)R}{k_r} = \frac{(0,1 \cdot 10^6 + 10^4 \cdot 8) \cdot 2000}{100 \cdot 10^6} = 3,6 \text{ mm}$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa



Dane:
 $R=2m$
 $H=8m$
 $p_0=1 \text{ bar}$
 $\gamma=10^4 \text{ N/m}^3$
 $k_r=100 \text{ MPa}$

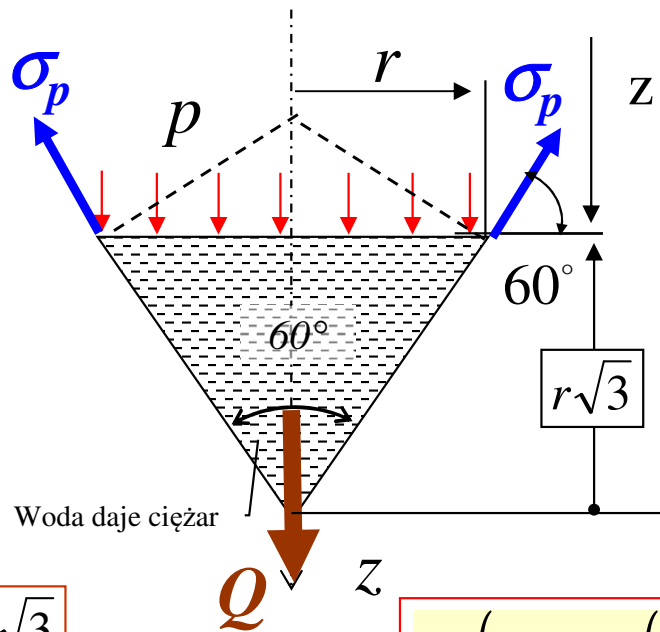
$$Q = \frac{1}{3} \pi r^3 \gamma \sqrt{3}$$

$$p = p_0 + z \cdot \gamma$$

$$p = p_0 + (H + R\sqrt{3} - r\sqrt{3}) \cdot \gamma$$

Stożek:

$$-2\pi r \delta_s \sigma_p \sin 60^\circ + \pi r^2 (p_0 + (H + R\sqrt{3} - r\sqrt{3}) \gamma) + \frac{1}{3} \pi r^3 \gamma \sqrt{3} = 0$$



Woda daje ciężar

$$\sigma_{red}^T = |\sigma_t| =$$

$$\frac{2 \cdot (p_0 + \gamma \cdot (H + R\sqrt{3} - r\sqrt{3})) r}{\sqrt{3} \delta_s} \leq k_r$$

Dla $r = R$:

$$\delta_s \geq \frac{2(p_0 + \gamma \cdot H)R}{\sqrt{3} k_r} = \frac{2(0,1 \cdot 10^6 + 10^4 \cdot 8) \cdot 2000}{\sqrt{3} \cdot 100 \cdot 10^6} = 4,16 \text{ mm}$$

Równanie równowagi sił na z:

$$-2\pi r \delta_s \sigma_p \sin 60^\circ + \pi r^2 p + Q = 0$$

$$\sigma_p = \frac{(p_0 + \gamma(H + R\sqrt{3} - \frac{2}{3}r\sqrt{3})) \cdot r}{\sqrt{3} \delta_s}$$

$$\rho_p = \infty$$

$$\rho_t = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

~~$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}$$~~

$$\sigma_t = \frac{2 \cdot (p_0 + \gamma \cdot (H + R\sqrt{3} - r\sqrt{3})) r}{\sqrt{3} \delta_s}$$

Warunek
wytrzymałościowy

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Czasza: $\delta_K = 1mm$

$$\sigma_p = \frac{p_0 R}{2\delta_K} = \frac{0,1 \cdot 2000}{2 \cdot 1} = 100MPa$$

$$\sigma_t = \frac{p_0 R}{2\delta_K} = 100MPa$$

Walec: $\delta_w = 3,6mm$

$$\sigma_p = \frac{p_0 R}{2\delta_w} = \frac{0,1 \cdot 2000}{2 \cdot 3,6} = 28MPa$$

$$\sigma_t = \frac{(p_0 + \gamma \cdot z)R}{\delta_w}$$

$$\sigma_t(z=0) = \frac{p_0 R}{\delta_w} = 56MPa \quad \sigma_t(z=H) = \frac{(p_0 + \gamma \cdot H)R}{\delta_w} = 100MPa$$

Stożek: $\delta_s = 4,16mm$

$$\sigma_p = \frac{(p_0 + \gamma(H + R\sqrt{3} - \frac{2}{3}r\sqrt{3})) \cdot r}{\sqrt{3}\delta_s}$$

$$\sigma_t = \frac{2 \cdot (p_0 + \gamma \cdot (H + R\sqrt{3} - r\sqrt{3}))r}{\sqrt{3}\delta_s}$$

$$\sigma_p(r=0) = 0MPa$$

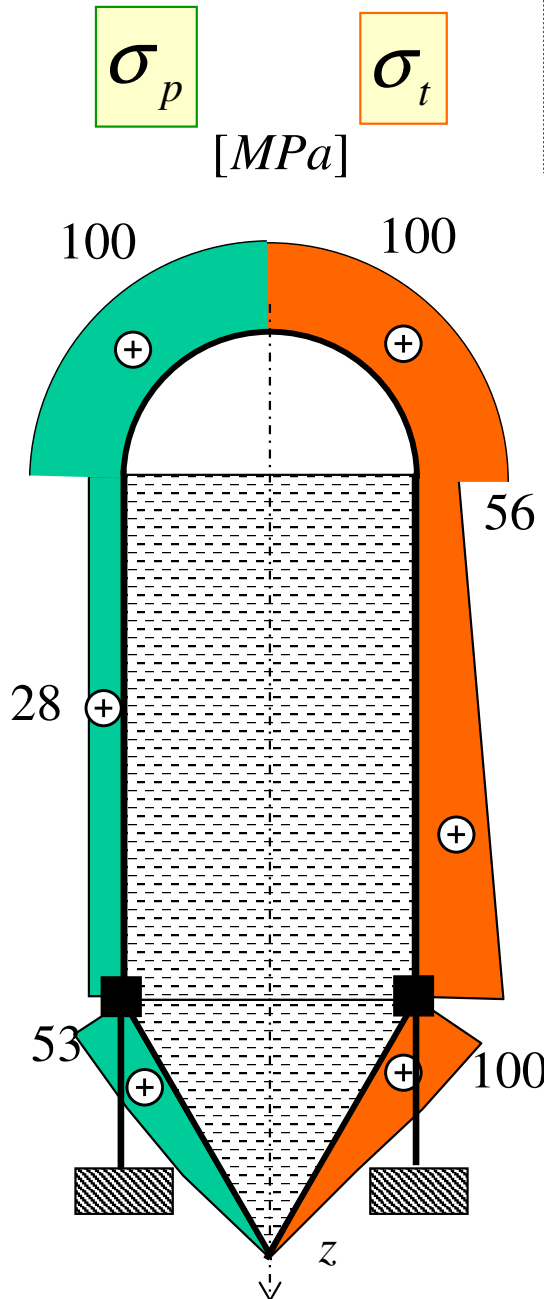
$$\sigma_t(r=0) = 0MPa$$

$$\sigma_p(r=R) = \frac{(p_0 + \gamma(H + \frac{1}{3}R\sqrt{3})) \cdot R}{\sqrt{3}\delta_s}$$

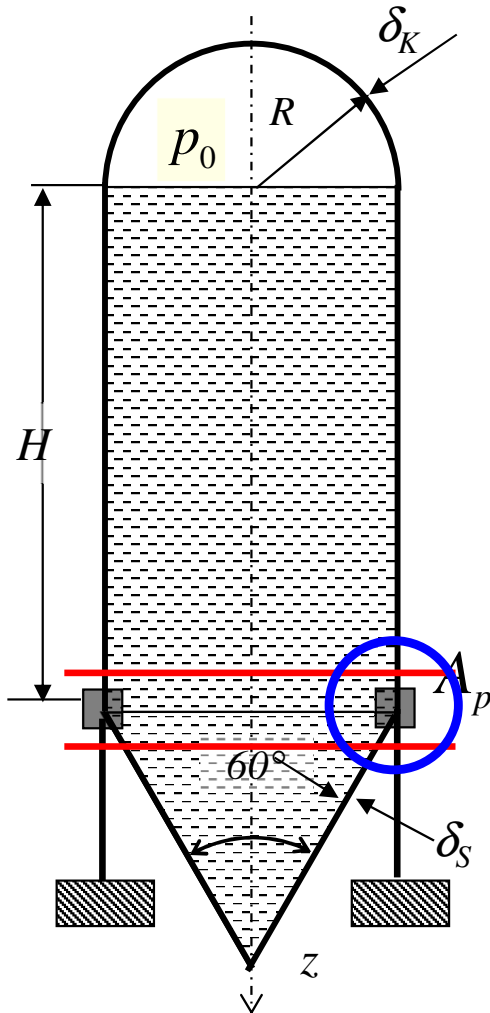
$$\sigma_t(r=R) = \frac{2 \cdot (p_0 + \gamma \cdot H)R}{\sqrt{3}\delta_s}$$

$$\sigma_p(r=R) = 53MPa$$

$$\sigma_t(r=R) = 100MPa$$



Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa



Pierścień

Walec: $\delta_W = 3,6\text{mm}$

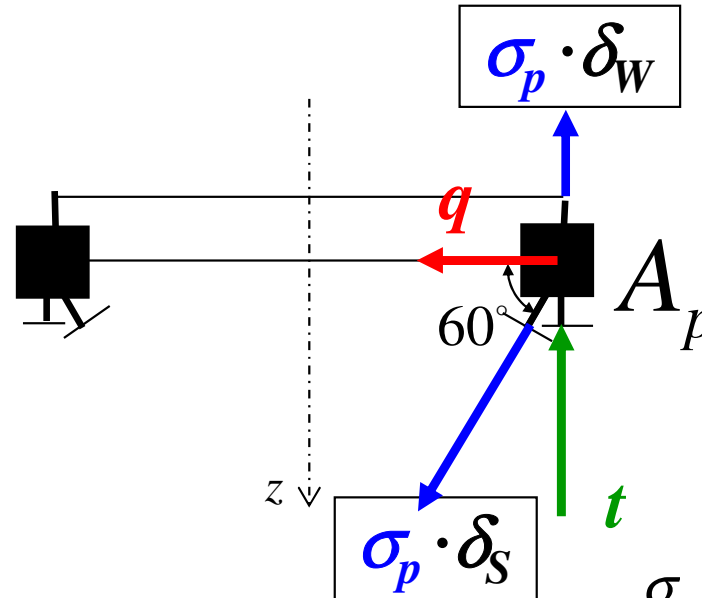
$$\sigma_p \delta_W = \frac{p_0 R}{2 \delta_W} \cdot \delta_W = \frac{p_0 R}{2}$$

$$\sigma_p \cdot \delta_W = 28\text{MPa} \cdot 3,6\text{mm} = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Stożek: $\delta_S = 4,16\text{mm}$

$$\sigma_p(r=R) \cdot \delta_S = \frac{(p_0 + \gamma(H + \frac{1}{3}R\sqrt{3})) \cdot R}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_p(r=R) \cdot \delta_S = 53\text{MPa} \cdot 4,16\text{mm} = 220,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$



$$q = \sigma_p \cdot \delta_S \cos 60^\circ = 220,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cos 60^\circ = 110,25 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Siła w pierścieniu: $N = q \cdot R = 110,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \cdot 2000\text{mm} = 220500\text{N}$

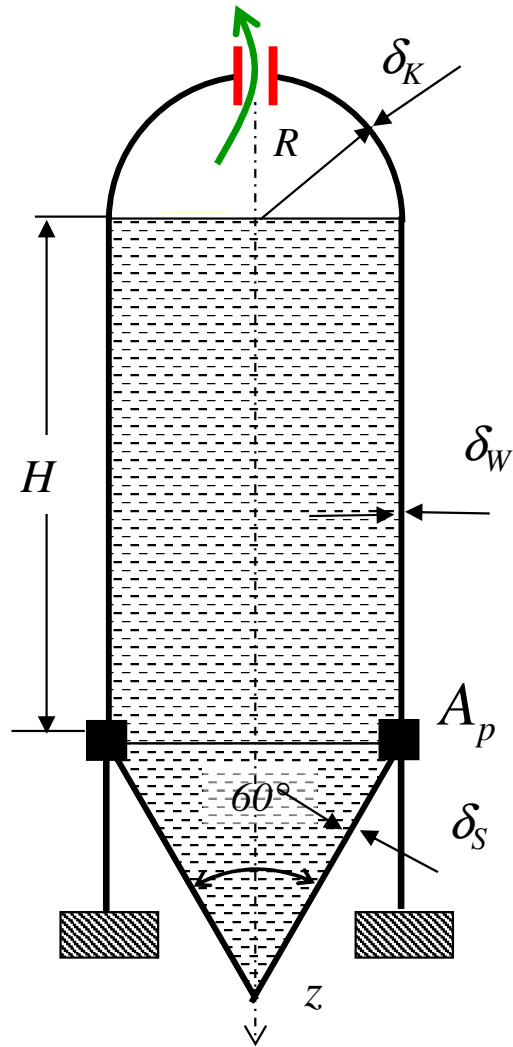
Warunek wytrzymałości pierścienia:

$$\sigma_N = \frac{N}{A_p} \leq k_r$$

$$A_p \geq \frac{N}{k_r} = \frac{220500\text{N}}{100\text{MPa}} = 2205\text{mm}^2$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Zad.2. Zbiornik z zadania 1 ma **otwarty zawór wyrównujący ciśnienia** w czaszy kulistej.
Jak zmieni się stan naprężenia w zbiorniku?



Dane:

$$R=2m$$

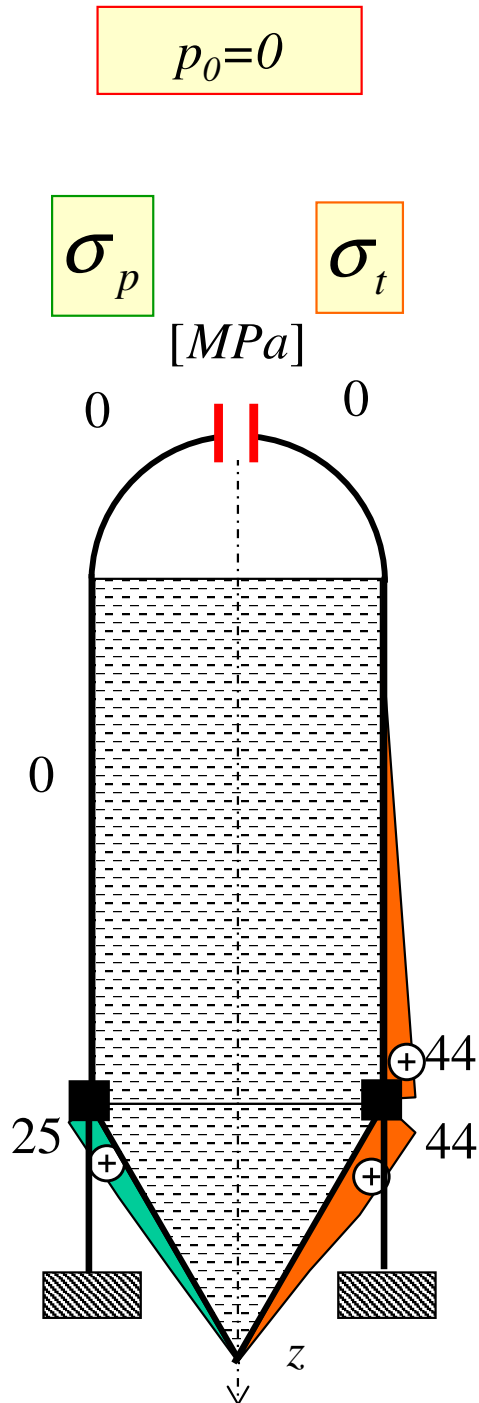
$$H=8m$$

~~$p_0 = 1 \text{ bar}$~~

$$\gamma=10^4 \text{ N/m}^3$$

$$p_0=0$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa



$$p_0 = 0$$

$$\sigma_p$$

$$\sigma_t$$

[MPa]

Czasza: $\delta_K = 1\text{mm}$

$$\sigma_p = \frac{p_0 R}{2\delta_K} = 0\text{MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{p_0 R}{2\delta_K} = 0\text{MPa}$$

Walec: $\delta_W = 3,6\text{mm}$

$$\sigma_p = \frac{p_0 R}{2\delta_W} = 0\text{MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{(p_0 + \gamma \cdot z)R}{\delta_W}$$

$$\sigma_t(z=0) = \frac{p_0 R}{\delta_W} = 0\text{MPa}$$

$$\sigma_t(z=H) = \frac{(p_0 + \gamma \cdot H)R}{\delta_W} = 44\text{MPa}$$

Stożek: $\delta_S = 4,16\text{mm}$

$$\sigma_p = \frac{(p_0 + \gamma(H + R\sqrt{3} - \frac{2}{3}r\sqrt{3})) \cdot r}{\sqrt{3}\delta_S}$$

$$\sigma_t = \frac{2 \cdot (p_0 + \gamma \cdot (H + R\sqrt{3} - r\sqrt{3}))r}{\sqrt{3}\delta_S}$$

$$\sigma_p(r=0) = 0\text{MPa}$$

$$\sigma_t(r=0) = 0\text{MPa}$$

$$\sigma_p(r=R) = \frac{(p_0 + \gamma(H + \frac{1}{3}R\sqrt{3})) \cdot R}{\sqrt{3}\delta_S}$$

$$\sigma_t(r=R) = \frac{2 \cdot (p_0 + \gamma \cdot H)R}{\sqrt{3}\delta_S}$$

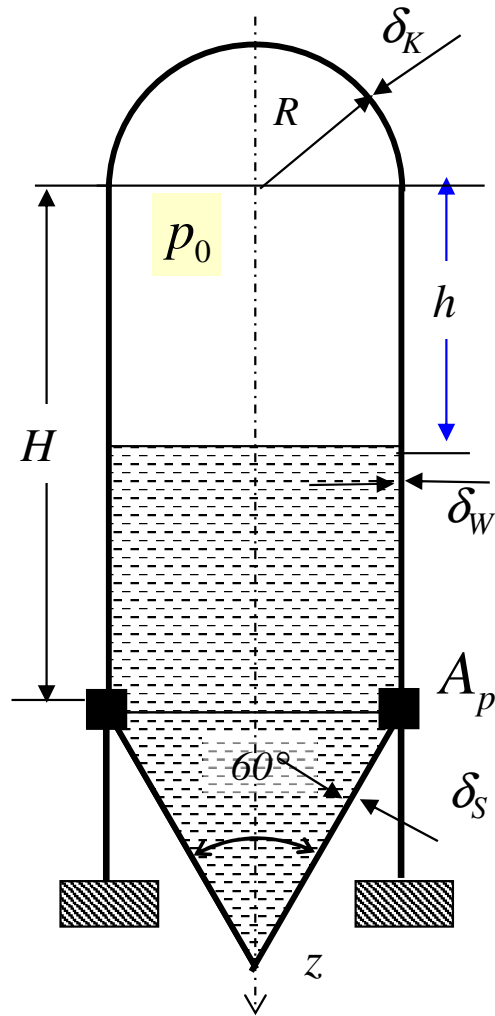
$$\sigma_p(r=R) = 25\text{MPa}$$

$$\sigma_t(r=R) = 44\text{MPa}$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Zad.3. Zbiornik z zadania 1 ma **obniżony poziom cieczy w części walcowej**.

Jak zmieni się stan naprężenia?



Dane:

$$R=2m$$

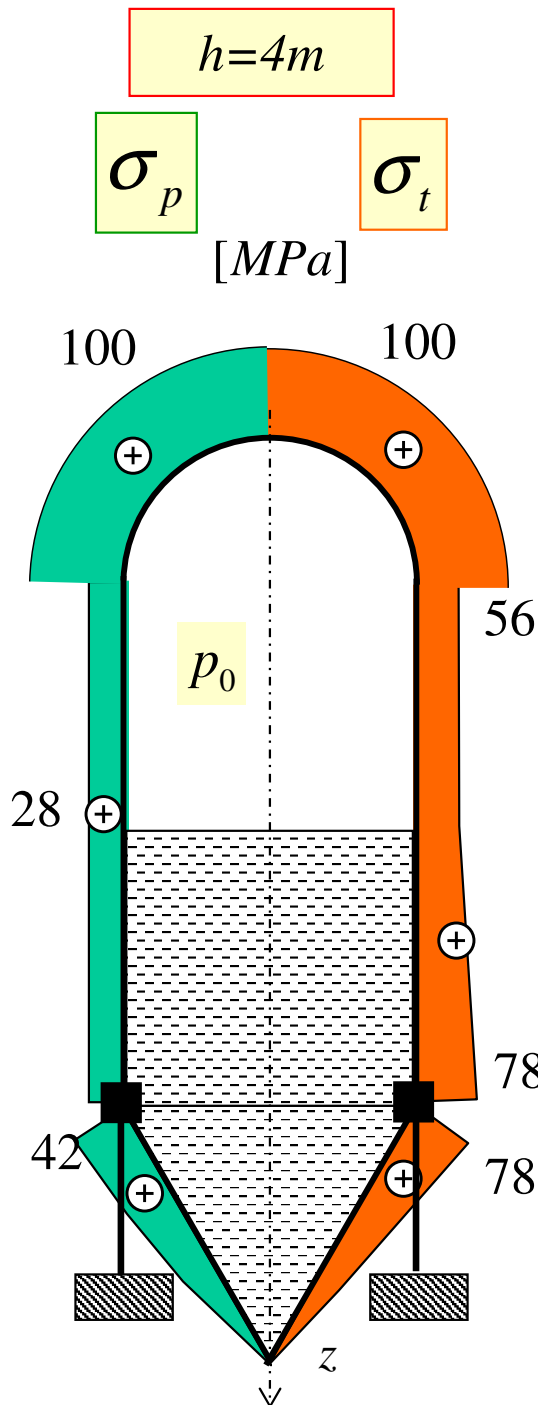
$$H=8m$$

$$h=4m$$

$$p_0=1 \text{ bar}$$

$$\gamma=10^4 \text{ N/m}^3$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa



$$h=4m$$

$$\sigma_p$$

$$\sigma_t$$

[MPa]

$$\text{Czasza: } \delta_K = 1mm$$

$$\sigma_p = \frac{p_0 R}{2\delta_K} = \frac{0,1 \cdot 2000}{2 \cdot 1} = 100MPa$$

$$\sigma_t = \frac{p_0 R}{2\delta_K} = 100MPa$$

$$\text{Walec: } \delta_W = 3,6mm$$

$$\sigma_p = \frac{p_0 R}{2\delta_W} = \frac{0,1 \cdot 2000}{2 \cdot 3,6} = 28MPa$$

$$\sigma_t = \frac{(p_0 + \gamma \cdot (z-h))R}{\delta_W}$$

$$\text{dla } z \geq h$$

$$\sigma_t(0 \div h) = \frac{p_0 R}{\delta_W} = 56MPa \quad \sigma_t(z=H) = \frac{(p_0 + \gamma \cdot (H-h))R}{\delta_W} = 78MPa$$

$$\text{Stożek: } \delta_S = 4,16mm$$

$$\sigma_p = \frac{(p_0 + \gamma((H-h) + R\sqrt{3} - \frac{2}{3}r\sqrt{3})) \cdot r}{\sqrt{3}\delta_S}$$

$$\sigma_t = \frac{2 \cdot (p_0 + \gamma \cdot ((H-h) + R\sqrt{3} - r\sqrt{3}))r}{\sqrt{3}\delta_S}$$

$$\sigma_p(r=0) = 0MPa$$

$$\sigma_t(r=0) = 0MPa$$

$$\sigma_p(r=R) = \frac{(p_0 + \gamma((H-h) + \frac{1}{3}R\sqrt{3})) \cdot R}{\sqrt{3}\delta_S}$$

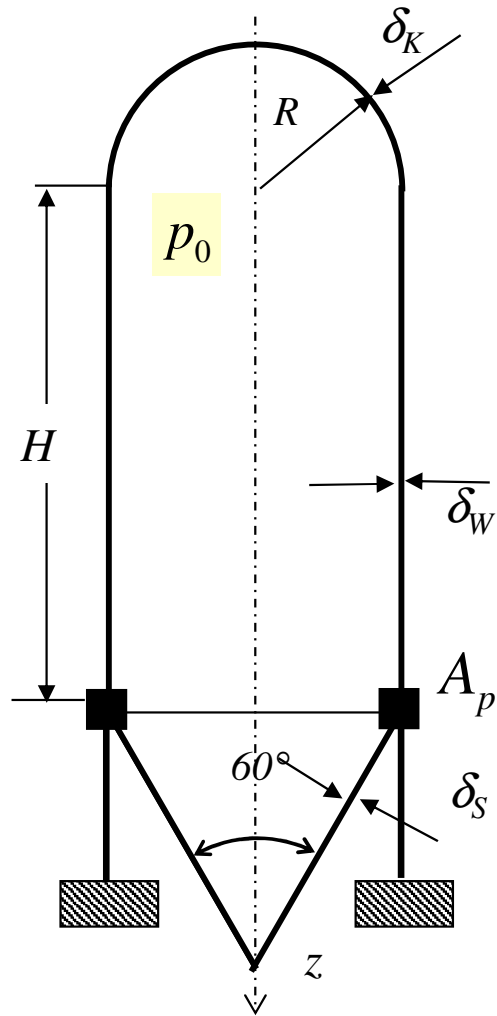
$$\sigma_t(r=R) = \frac{2 \cdot (p_0 + \gamma \cdot (H-h))R}{\sqrt{3}\delta_S}$$

$$\sigma_p(r=R) = 42MPa$$

$$\sigma_t(r=R) = 78MPa$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Zad.4. Zbiornik z zadania 1 jest **pusty, ale ciśnienie pozostaje**. Jak zmieni się stan naprężenia?



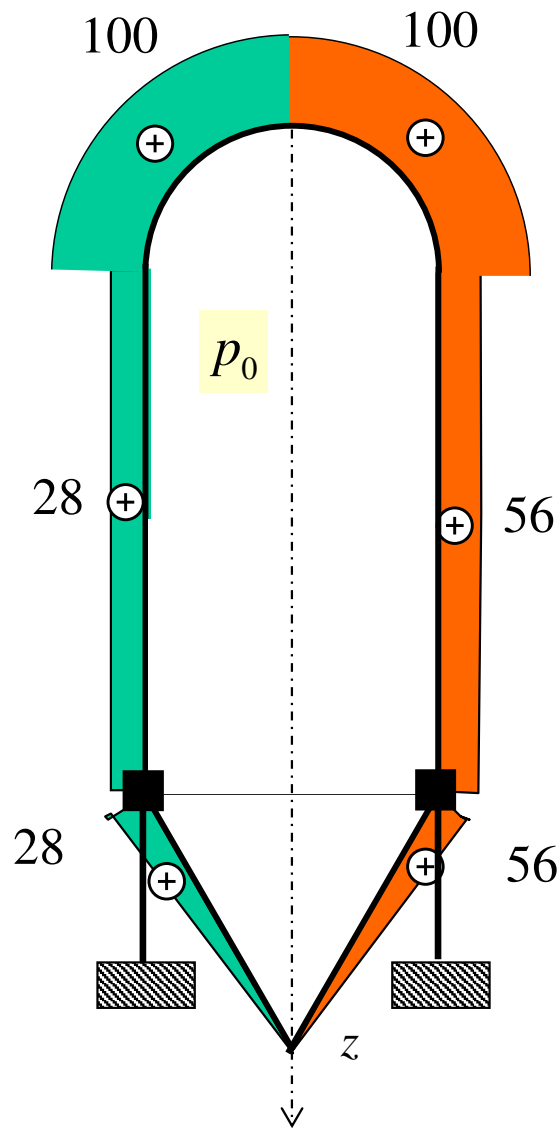
Dane:
 $R=2m$
 $H=8m$
 $p_0=1 \text{ bar}$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Brak cieczy

$$\sigma_p \quad \sigma_t$$

[MPa]



Czasza: $\delta_K = 1mm$

$$\sigma_p = \frac{p_0 R}{2\delta_K} = \frac{0,1 \cdot 2000}{2 \cdot 1} = 100MPa$$

$$\sigma_t = \frac{p_0 R}{2\delta_K} = 100MPa$$

Walec: $\delta_W = 3,6mm$

$$\sigma_p = \frac{p_0 R}{2\delta_W} = \frac{0,1 \cdot 2000}{2 \cdot 3,6} = 28MPa$$

$$\sigma_t = \frac{p_0 R}{\delta_W} = 56MPa$$

Stożek: $\delta_S = 4,16mm$

$$\sigma_p = \frac{p_0 \cdot r}{\sqrt{3} \delta_S}$$

$$\sigma_t = \frac{2 \cdot p_0 r}{\sqrt{3} \delta_S}$$

$$\sigma_p(r=0) = 0MPa$$

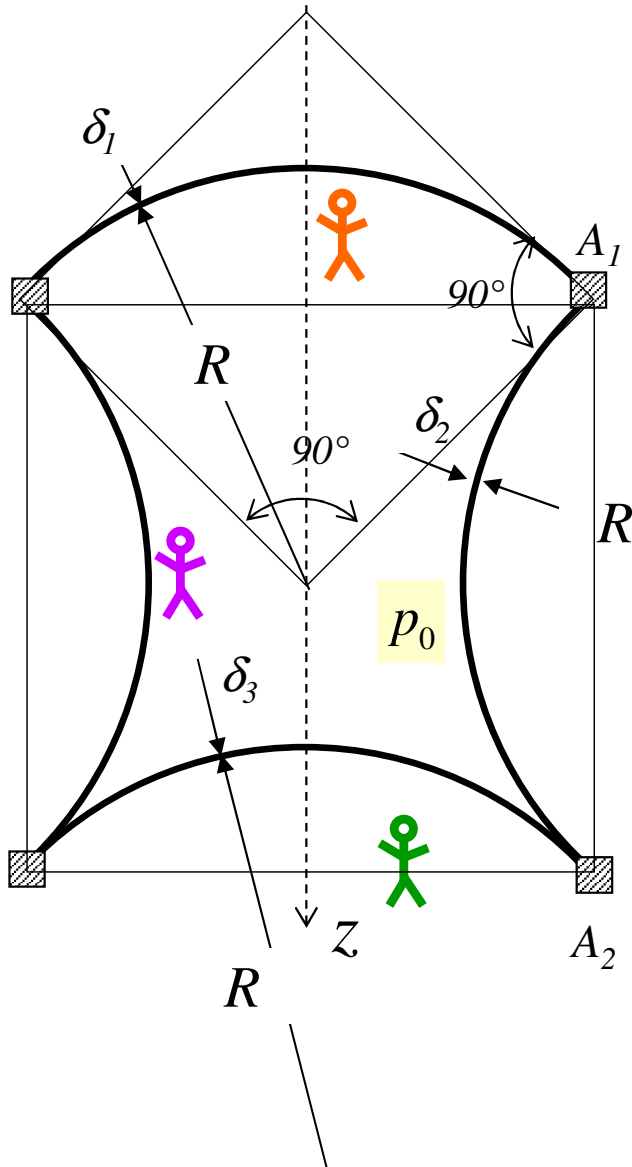
$$\sigma_t(r=0) = 0MPa$$

$$\sigma_p(r=R) = 28MPa$$

$$\sigma_t(r=R) = 56MPa$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Zad.5. Zbiornik o geometrii opisanej na rysunku wypełniony jest gazem o nadciśnieniu p_0 .
Znaleźć stan naprężenia w zbiorniku.



Dane:

$$R=2m$$

$$p_0=1 \text{ bar}$$

$$\delta_1=1mm$$

$$\delta_2=1mm$$

$$\delta_3=1mm$$

$$A_1=40cm^2$$

$$A_2=40cm^2$$

Czasza górna:



$$\rho_p = R$$

$$\rho_t = R$$

$$p = p_0$$

Czasza dolna:



$$\rho_p = R$$

$$\rho_t = R$$

$$p = -p_0$$

Torus:

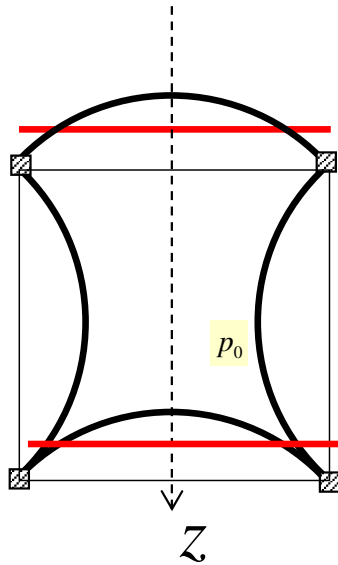


$$\rho_p = -R$$

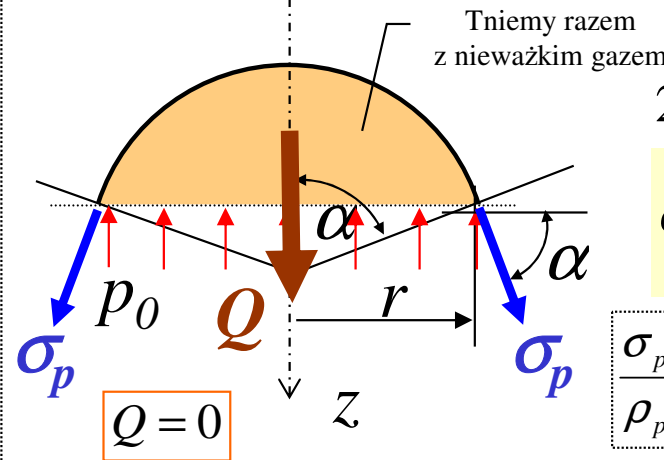
$$\rho_t = ?$$

$$p = p_0$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa



Czasza górna:



Równanie równowagi sił na z:

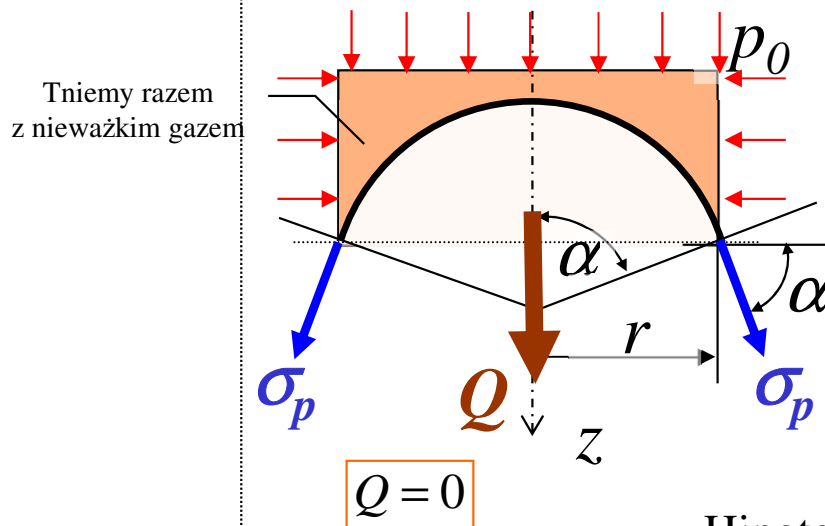
$$2\pi r \delta_1 \sigma_p \sin \alpha - \pi r^2 p_0 + Q = 0$$

$$\sigma_p = \frac{p_0 R}{2\delta_1} = \frac{0.1 \cdot 2000}{2 \cdot 1} = 100 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \rightarrow \sigma_t = \frac{p_0 R}{2\delta_1} = 100 \text{ MPa}$$

Hipoteza Treski: $\sigma_{red}^T = |\sigma_p| = \frac{p_0 R}{2\delta_1} = 100 \text{ MPa}$

Czasza dolna:



Równanie równowagi sił na z:

$$2\pi r \delta_3 \sigma_p \sin \alpha + \pi r^2 p_0 + Q = 0$$

$$\sigma_p = -\frac{p_0 R}{2\delta_3} = -\frac{0.1 \cdot 2000}{2 \cdot 1} = -100 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \rightarrow \sigma_t = -\frac{p_0 R}{2\delta_3} = -100 \text{ MPa}$$

Hipoteza Treski: $\sigma_{red}^T = |\sigma_p| = \frac{p_0 R}{2\delta_3} = 100 \text{ MPa}$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Torus:

$$\rho_p = -R$$

$$\rho_t = ?$$

$$p = p_0$$

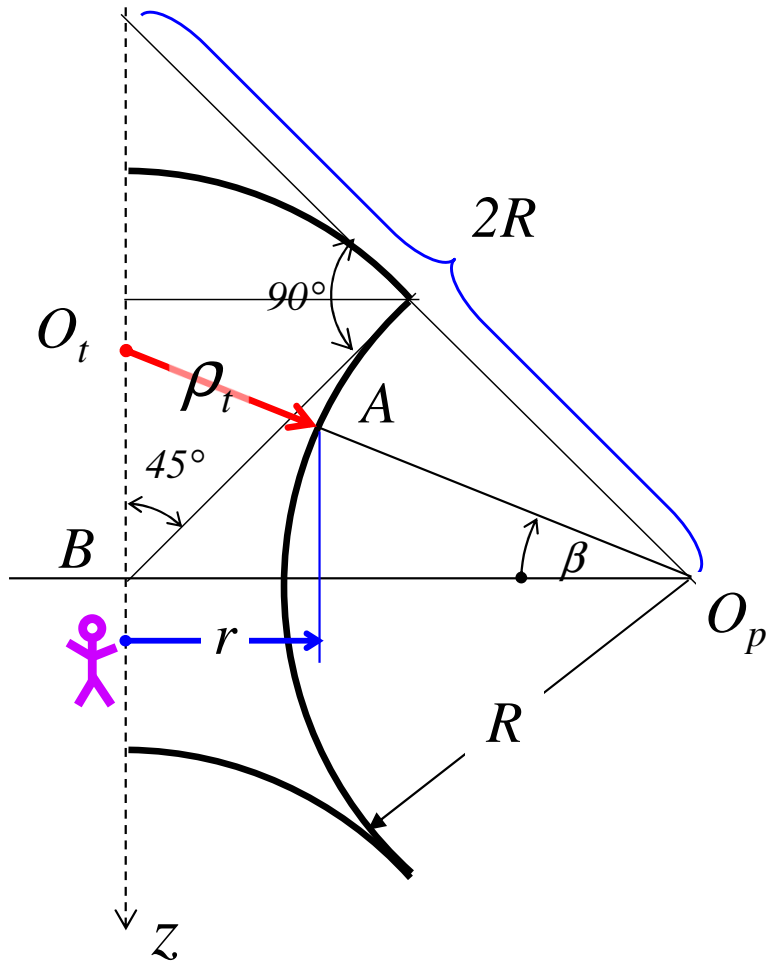
Wyznaczenie promienia krzywizny obwodowej torusa

$$|BO_p| = R\sqrt{2}$$

$$|O_p O_t| = \frac{|BO_p|}{\cos \beta} = \frac{R\sqrt{2}}{\cos \beta}$$

$$\rho_t = |O_p O_t| - R = \frac{R\sqrt{2}}{\cos \beta} - R \quad \rightarrow \quad \rho_t = R \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\cos \beta} - 1 \right)$$

$$r = \rho_t \cos \beta \quad \rightarrow \quad r = R \cdot (\sqrt{2} - \cos \beta)$$



Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Torus:

Równanie równowagi sił na z:

$$2\pi r \delta_2 \sigma_p \cos \beta - \pi r^2 p_0 + Q = 0$$

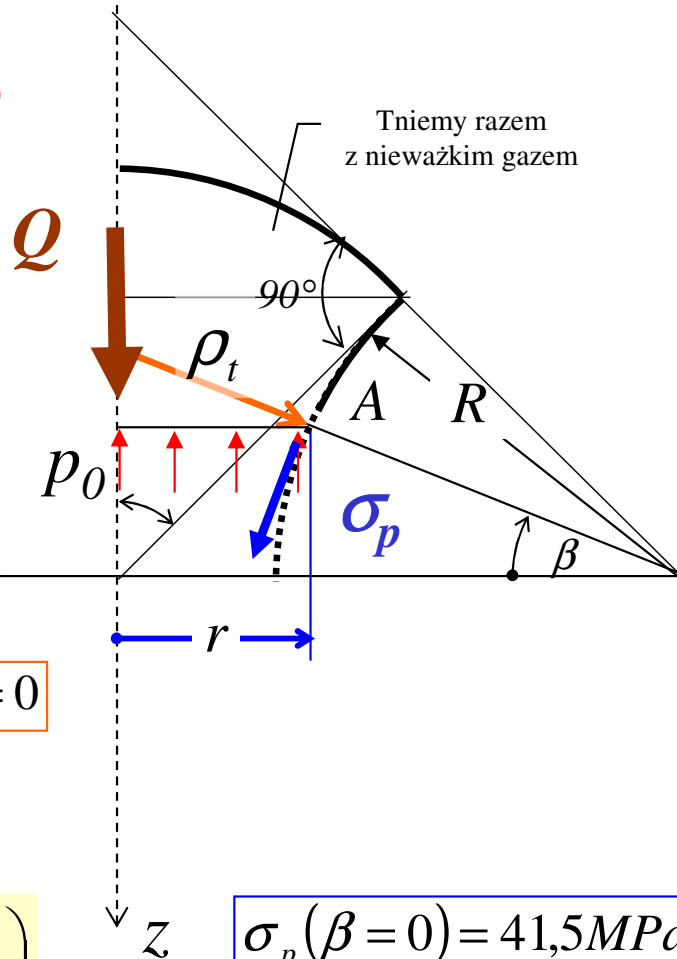
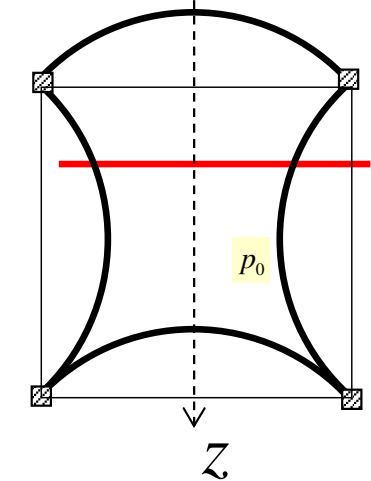
$$\sigma_p = \frac{p_0 r}{2\delta_2 \cos \beta}$$

$$\sigma_p = \frac{p_0 R}{2\delta_2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\cos \beta} - 1 \right)$$

$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}$$

$$\frac{\frac{p_0 R}{2\delta_2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\cos \beta} - 1 \right)}{-R} + \frac{\sigma_t}{R \left(\frac{\sqrt{2}}{\cos \beta} - 1 \right)} = \frac{p_0}{\delta_2}$$

$$\sigma_t = \frac{p_0 R}{2\delta_2} \left(\frac{2}{\cos^2 \beta} - 1 \right)$$



$$Q = 0$$

$$\rho_p = -R$$

$$\rho_t = R \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\cos \beta} - 1 \right)$$

$$r = R \cdot (\sqrt{2} - \cos \beta)$$

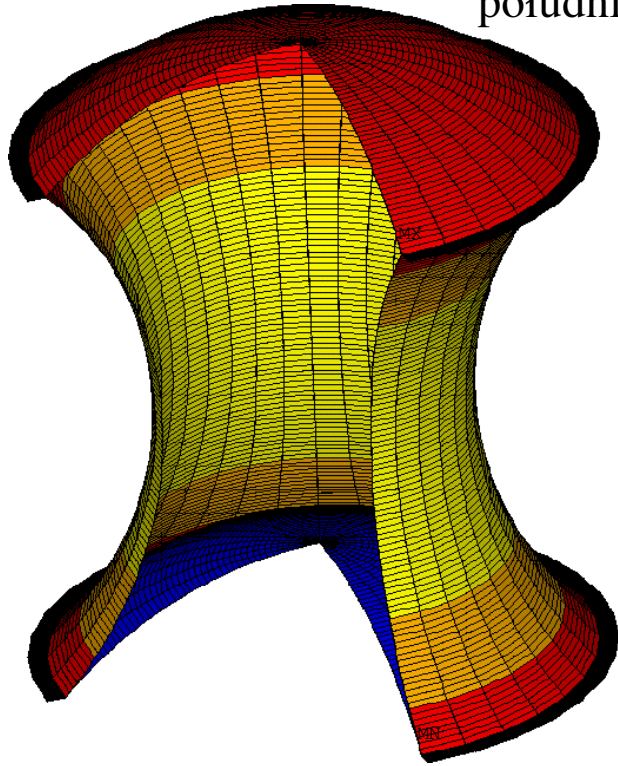
$$\sigma_p(\beta = 0) = 41,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t(\beta = 0) = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_p(\beta = 45^\circ) = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t(\beta = 45^\circ) = 300 \text{ MPa}$$

Naprężenia południkowe:

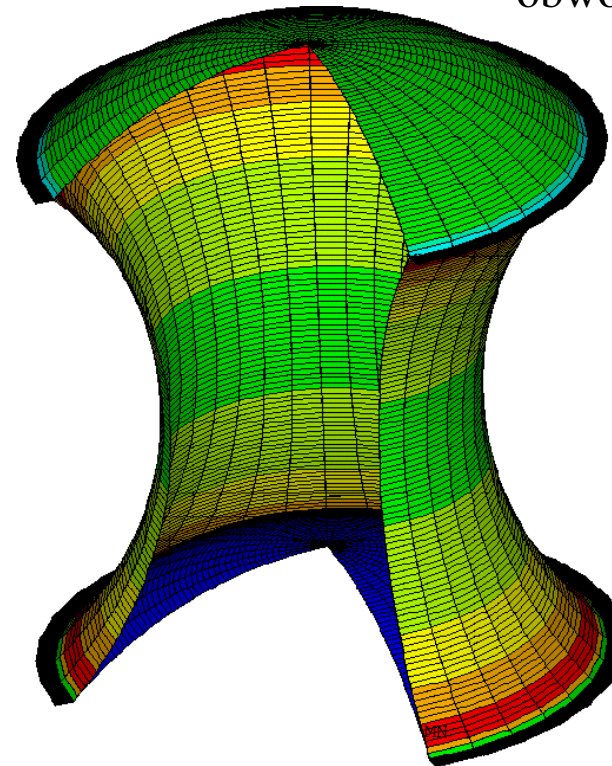


```
ANSYS 15.0  
JAN 2 2018  
20:46:06  
PLOT NO. 1  
ELEMENT SOLUTION  
STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
/EXPANDED  
SMIS18 (NOAVG)  
TOP  
DMX =3.95269  
SMN =-100.085  
SMX =100.141  
-100.085  
-77.8374  
-55.5901  
-33.3428  
-11.0955  
11.1518  
33.3991  
55.6464  
77.8937  
100.141
```



Wyniki analizy MES

Naprężenia obwodowe:

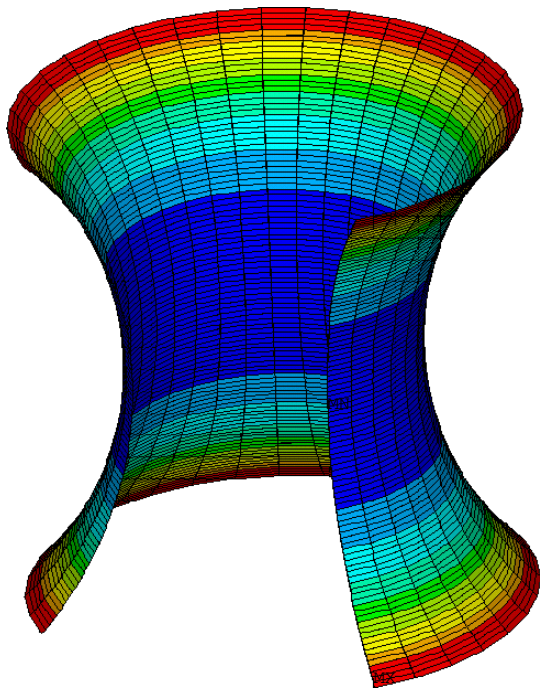


```
ANSYS 15.0  
JAN 2 2018  
20:46:27  
PLOT NO. 2  
ELEMENT SOLUTION  
STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
/EXPANDED  
SMIS19 (NOAVG)  
TOP  
DMX =3.95269  
SMN =-102.997  
SMX =274.038  
-102.997  
-61.1043  
-19.2116  
22.6812  
64.574  
106.467  
148.36  
190.252  
232.145  
274.038
```

Naprężenia
południkowe:

```

ANSYS 15.0
JAN 2 2018
20:47:03
PLOT NO. 3
ELEMENT SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
/EXPANDED
SMIS18 (NOAVG)
TOP
DMX =2.90524
SMN =41.4272
SMX =95.8368
41.4272
47.4727
53.5182
59.5637
65.6092
71.6548
77.7003
83.7458
89.7913
95.8368
    
```



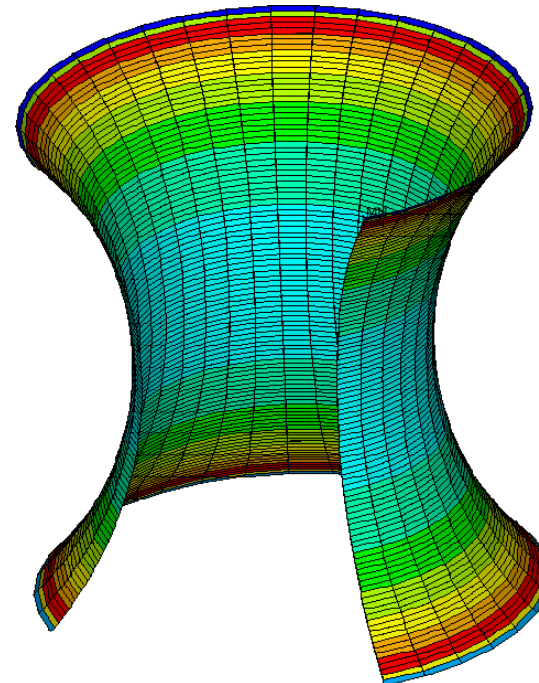
Torus:

Wyniki analizy MES

Naprężenia
obwodowe:

```

ANSYS 15.0
JAN 2 2018
20:47:55
PLOT NO. 4
ELEMENT SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
/EXPANDED
SMIS19 (NOAVG)
TOP
DMX =2.90524
SMN =31.0452
SMX =274.038
31.0452
58.0444
85.0436
112.043
139.042
166.041
193.04
220.04
247.039
274.038
    
```



Wyniki teorii błonowej

$$\sigma_p(\beta = 0) = 41,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t(\beta = 0) = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_p(\beta = 45^\circ) = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t(\beta = 45^\circ) = 300 \text{ MPa}$$